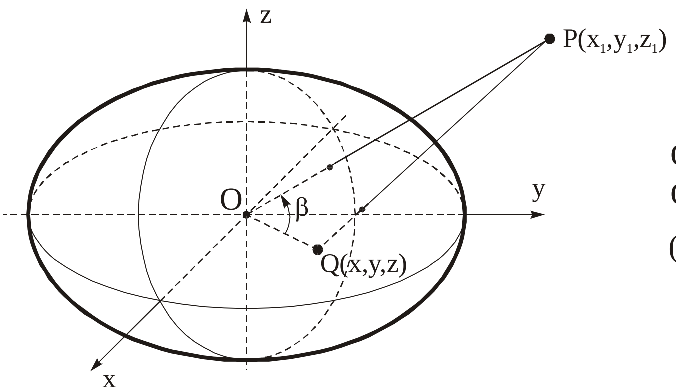
CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

I. POTENTIEL NEWTONIEN D'UN SOLIDE :



OP = r
OQ = ρ
$(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP}) = \beta$

Au point Q : masse dM = μ.dv
μ : masse volumique au point Q ; μ(x,y,z)
dv : volume élémentaire entourant le point Q
Le point P de **masse 1 kg** est soumis, sous l'attraction universelle du point Q à la force :

$$\overrightarrow{dF} = -\frac{G.dM}{QP^2}\,\overrightarrow{u}_{QP} \quad ; \quad \|\overrightarrow{u}_{QP}\| = 1$$

Le travail élémentaire $d^2\mathcal{T}$ pour tout déplacement $\overrightarrow{dOP}$ du point P est donné par :

$$d^2\mathcal{T} = \overrightarrow{dF}.\overrightarrow{dOP} = \overrightarrow{dF}.(\overrightarrow{dOQ} + \overrightarrow{dQP}) = \overrightarrow{dF}.\overrightarrow{dQP}$$

Or : $\overrightarrow{QP} = QP.\overrightarrow{u}_{QP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dQP} = dQP.\overrightarrow{u}_{QP} + QP.d\overrightarrow{u}_{QP}$

Soit :

$$d^2\mathcal{T} = -\frac{G.dM}{QP^2}\,\overrightarrow{u}_{QP}.(dQP.\overrightarrow{u}_{QP} + QP.d\overrightarrow{u}_{QP}) = -\frac{G.dM}{QP^2}\,dQP = d\left(\frac{G.dM}{QP}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{T} = \frac{G.dM}{QP} + Cte$$

Si $QP \to \infty$, $d\mathcal{T} \to 0$ $\Rightarrow$ Cte = 0

Par définition, on pose $\mathbf{d\mathcal{T} = -dU}$. U s'appelle le potentiel newtonien. On a donc :

$$\boxed{dU = -\frac{G.dM}{QP}} \qquad (1)$$

On a :

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (x_1-x).\overrightarrow{x} + (y_1-y).\overrightarrow{y} + (z_1-z).\overrightarrow{z}$$

$$\Rightarrow \quad QP = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}$$

Finalement, pour un solide de masse M, le potentiel newtonien U s'écrira :

$$\boxed{U = -G.\iiint_M \frac{dM}{\sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}}} \qquad (2)$$

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

Soit :

$$OP = r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad ; \quad OQ = \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ}^2 = PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2\,\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ}^2 = PQ^2 = OP^2 - 2\,OQ.OP.\cos(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) + OQ^2$$

$$PQ^2 = r^2 - 2\,r.\rho.\cos\beta + \rho^2 = r^2.\left(1 - 2\,\frac{\rho}{r}.\cos\beta + \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\frac{1}{QP} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\frac{\rho}{r}.\cos\beta + \frac{\rho^2}{r^2}}}} \qquad (3)$$

Le point P étant à l'extérieur du solide, nous aurons toujours $\rho \leqslant r$. Nous pourrons donc poser $\varepsilon = \rho/r \leqslant 1$. La relation (3) devient alors :

$$\frac{r}{QP} = \left(1 - 2\,\varepsilon.\cos\beta + \varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

En faisant un développement limité en ε de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\left(1 - 2\,\varepsilon.\cos\beta + \varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon.\cos\beta + \varepsilon^2.\,\frac{3\cos^2\beta - 1}{2} + \varepsilon^3.\,\frac{5\cos^3\beta - 3\cos\beta}{2} + \ldots$$

Posons $x = \cos\beta$ et :

$$\frac{dP'_1}{dx} = x \quad ; \quad \frac{d^2P'_1}{dx^2} = \frac{3x^2 - 1}{2} \quad ; \quad \frac{d^3P'_1}{dx^3} = \frac{5x^3 - 3x}{2} \quad ; \quad \ldots$$

D'où, par intégration :

$$P'_1 = \frac{x^2}{2} + C_{11} \;\; ; \text{ en prenant } C_{11} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P'_1 = \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$P'_2 = \frac{(x^2 - 1)^2}{8} + C_{21}.x + C_{22} \quad ; \quad \text{en prenant } C_{21} = C_{22} = 0, \text{ on obtient :}$$

$$P'_2 = \frac{(x^2 - 1)^2}{8} = \frac{(x^2 - 1)^2}{2^2.2!}$$

On pourra remarquer que P'_1 peut s'écrire aussi : $P'_1 = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{2^1.1!}$

$$P'_3 = \frac{x^6}{48} - \frac{x^4}{16} + C_{31}.x^2 + C_{32}.x + C_{33} = \frac{1}{48}.(x^6 - 3x^4 + 48C_{31}.x^2 + 48C_{32}.x + 48C_{33})$$

en prenant $C_{31} = 1/16$; $C_{32} = 0$ et $C_{33} = -1/48$ on a :

$$P'_3 = \frac{1}{48}(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) = \frac{(x^2 - 1)^3}{48} = \frac{(x^2 - 1)^3}{2^3.3!}$$

Le terme général d'ordre n, s'écrira donc :

$$P'_n(x) = \frac{1}{2^n.\,n!}(x^2 - 1)^n$$

$$\frac{d^nP'_n}{dx^n} = P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Les polynômes $P_n(x)$ s'appellent les polynômes de Legendre.

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

Ainsi :

$$\frac{1}{QP} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\rho}{r}P_1(\cos\beta) + \frac{\rho^2}{r^2}P_2(\cos\beta) + \frac{\rho^3}{r^3}P_3(\cos\beta) + \ldots\right] = \frac{1}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{r^n}P_n(\cos\beta)\right]$$

Donc, nous obtenons pour le potentiel U :

$$\boxed{U = -\frac{G}{r}\iiint_M\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{r^n}P_n(\cos\beta)\right].dM = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}U_n} \qquad (4)$$

1 – <u>Calcul du potentiel principal U_0</u> :

$$U_0 = -\frac{G}{r}\iiint_M dM \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_0 = -\frac{G.M}{r}}$$

2 – <u>Calcul du potentiel U_1</u> :

$$U_1 = -\frac{G}{r}\iiint_M \frac{\rho}{r}.\cos\beta.dM \quad ; \quad \text{or } \cos\beta = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{OP.OQ} = \frac{x_1.x + y_1.y + z_1.z}{r.\rho}$$

Donc :

$$U_1 = -\frac{G}{r^3}\iiint_M (x_1.x + y_1.y + z_1.z).dM = -\frac{G}{r^3}\left[x_1.\iiint_M x.dM + y_1.\iiint_M y.dM + z_1.\iiint_M z.dM\right]$$

Si nous prenons l'origine O du repère confondue avec le centre d'inertie G du corps solide (O = G), alors par définition même du centre d'inertie (centre de gravité) :

$$M.\overrightarrow{OG} = \iiint_M \overrightarrow{OQ}.dM = \vec{0} = \vec{x}_1.\iiint_M x.dM + \vec{y}_1.\iiint_M y.dM + \vec{z}_1.\iiint_M z.dM$$

Autrement dit, chacune des intégrales est nulle. Par suite nous supposerons O=G.

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_1 = 0}$$

3 – <u>Calcul du potentiel U_2</u> :

$$U_2 = -\frac{G}{r^3}\iiint_M \frac{\rho^2}{r^2}\frac{3\cos^2\beta - 1}{2}dM = -\frac{G}{2r^3}\iiint_M\left[3\frac{(x.x_1+y.y_1+z.z_1)^2}{r^2} - (x^2+y^2+z^2)\right]dM$$

Après développement et réarrangement, il vient :

$$U_2 = -\frac{G}{2r^3}\left[\left(3\frac{x_1^2}{r^2}-1\right).\iiint_M x^2.dM + \left(3\frac{y_1^2}{r^2}-1\right).\iiint_M y^2.dM + \left(3\frac{z_1^2}{r^2}-1\right).\iiint_M z^2.dM\right]$$
$$-\frac{3G}{r^5}\left(x_1.y_1.\iiint_M x.y.dM + x_1.z_1.\iiint_M x.z.dM + y_1.z_1.\iiint_M y.z.dM\right)$$

Par définition des moments d'inertie :

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

$$A = \iiint_M (y^2 + z^2).dM \quad \Rightarrow \quad \text{moment d'inertie / } Ox_1$$

$$B = \iiint_M (z^2 + x^2).dM \quad \Rightarrow \quad \text{moment d'inertie / } Oy_1$$

$$C = \iiint_M (x^2 + y^2).dM \quad \Rightarrow \quad \text{moment d'inertie / } Oz_1$$

Par définition des produits d'inertie :

$$D = \iiint_M y.z.dM \quad ; \quad E = \iiint_M z.x.dM \quad ; \quad F = \iiint_M x.y.dM$$

Nous supposerons que les axes de coordonnées sont <u>aussi</u> les axes principaux d'inertie de telle sorte que : <u>D = E = F = 0</u>.

En outre :

$$A + B + C = 2\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2).dM = 2\iiint_M x^2.dM + 2\iiint_M (y^2 + z^2).dM$$

$$= 2\iiint_M x^2.dM + 2A$$

Soit :

$$\iiint_M x^2.dM = \frac{A + B + C}{2} - A$$

De même :

$$\iiint_M y^2.dM = \frac{A + B + C}{2} - B \quad ; \quad \iiint_M z^2.dM = \frac{A + B + C}{2} - C$$

Donc :

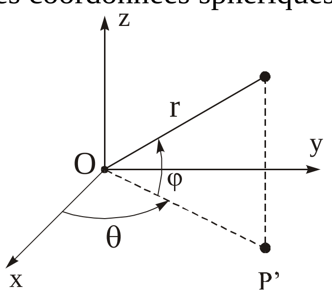
$$U_2 = -\frac{G}{2r^3}\left[\left(3\frac{x_1^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right) + \left(3\frac{y_1^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right) + \left(3\frac{z_1^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)\right]$$

$$= -\frac{G}{2r^3}\left[A+B+C - 3\frac{A.x_1^2 + B.y_1^2 + C.z_1^2}{r^2} + 3\frac{A+B+C}{2}\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{r^2} - 1\right)\right]$$

mais : $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$; donc :

$$U_2 = -\frac{G}{2r^3}\left(A + B + C - 3\frac{A.x_1^2 + B.y_1^2 + C.z_1^2}{r^2}\right)$$

Prenons des coordonnées sphériques :



$x_1 = r.\cos\varphi.\cos\theta$
$y_1 = r.\cos\varphi.\sin\theta$
$z_1 = r.\sin\varphi$

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

En sachant que cos2θ = 1 + 2cos²θ = 1 - 2sin²θ, il vient :

$$U_2 = -\frac{G}{2r^3}\left(A + B + C - 3\frac{A+B}{2}.\cos^2\varphi - 3C.\sin^2\varphi - 3\frac{A-B}{2}.\cos^2\varphi.\cos 2\theta\right)$$

Puisque cos²φ = 1 - sin²φ, nous avons finalement, après regroupement :

$$\boxed{U_2 = -\frac{G}{2r^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(1 - 3\sin^2\varphi\right) - 3\frac{A-B}{2}.\cos^2\varphi.\cos 2\theta\right]}$$

Le corps considéré sera supposé de révolution autour de l'axe Oz, ce qui implique que <u>A = B</u>. Dans cette hypothèse, nous aurons :

$$U_2 = -\frac{G}{r^3}\left(C - A\right)\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}$$

La quantité $\frac{C - A}{M.a_e^2} = J_2$ appliquée à la Terre, où a_e est le rayon équatorial terrestre et M la masse de la Terre, est une grandeur fondamentale liée à la Terre.

Nous pouvons écrire : $C - A = M.a_e^2.J_2$
Cette constante J_2, <u>relative à la Terre</u> et déduite de mesures expérimentales, a pour valeur :

<u>**J_2 = 0,001 082 63**</u>.

Finalement nous pourrons écrire dans le cas général avec symétrie de révolution autour de l'axe Oz :

$$\boxed{U_2 = -\frac{G.M}{r}\frac{a_e^2}{r^2}J_2\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}} \qquad (5)$$

4 - <u>Généralisation</u> :

Le calcul des quantités suivantes U_3, U_4, … s'effectue de la même façon. Mais il est à remarquer que si le solide considéré a son <u>plan équatorial de symétrie</u>, alors les potentiels d'ordre impair sont nuls.
Le potentiel se mettra ainsi sous la forme :

$$U = -\frac{G.M}{r}\left[1 + \frac{a_e^2}{r^2}J_2\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2} + \frac{a_e^4}{r^4}J_4\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{35}{8}\sin^4\varphi\right) + \dots\right]$$

Nous retrouvons les polynômes de Legendre $-P_2(\sin\varphi)$, $-P_4(\sin\varphi)$, …Donc :

$$\boxed{U = -\frac{G.M}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n}.J_{2n}.P_{2n}(\sin\varphi)\right]} \qquad (6)$$

Avec les conditions d'applications rappelées ci-dessous :

Symétrie de révolution autour de l'axe des pôles => A = B
Plan équatorial = Plan de symétrie => $U_{2p+1} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

Ces deux hypothèses sont vérifiées dans la cas des corps célestes d'une certaine masse (planètes, étoiles, …).
Dans le cas de la Terre, nous pouvons considérer que $J_{2n} = 0$ pour n > 1, compte tenu de la petitesse de ces termes par rapport à J_2.
Nous adopterons donc, pour notre planète, le potentiel simplifié suivant :

$$\boxed{U = -\frac{G.M}{r}\left(1 + J_2\frac{a_e^2}{r^2}\frac{1-3\sin^2\varphi}{2}\right)} \qquad (7)$$

II. CALCUL DE LA SURFACE D'ÉQUILIBRE DE LA TERRE :

1 - Hypothèses de travail :

La Terre tourne d'un mouvement de rotation uniforme ω autour de l'axe des pôles.
La période de rotation stellaire actuelle est : T = 23h56mn04,0989s = 86 164,0989 s

=> **ω = 7,292 115.10^{-5} rad.s^{-1}** **(H1)**

2 – Le rayon équatorial terrestre a_e a pour valeur :

=> **a_e = 6,378 137.10^{6} m** **(H2)**

3 – La masse gravitationnelle μ_T = G.M de la Terre sera prise égale à :

=> **G.M = 3,986 005.10^{14} m^3.s^{-2}** **(H3)**

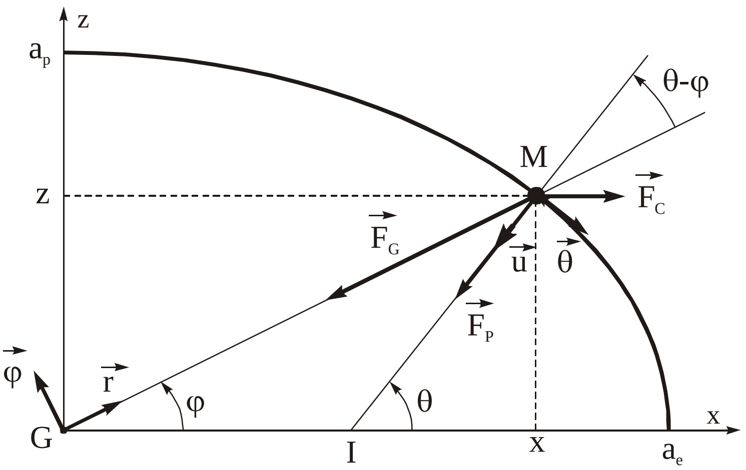
4 – Le coefficient J_2 aura pour valeur :

=> **J_2 = 0,001 082 63** **(H4)**

5 – Nous supposerons qu'en tout point de la surface terrestre, la verticale sera aussi le support de la force de pesanteur, résultante de la force gravitationnelle et de la force centrifuge en ce point. **(H5)**

Cette dernière hypothèse suppose à priori une élasticité suffisante de la croûte terrestre pour qu'elle puisse adopter « toute forme » avec des déperditions énergétiques négligeables.
Par symétrie de révolution autour de l'axe Oz, nous nous placerons dans un plan méridien quelconque d'axe Gx et Gy.

θ : latitude du point M



CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

Soit M un point arbitraire de la surface terrestre de masse m = 1 kg, de cordonnées cartésiennes (x,y).

En notant $\vec{F}_G$ la résultante des forces gravitationnelles s'exerçant en M, $\vec{F}_C$ la force centrifuge en M et $\vec{F}_P$ la force de pesanteur, résultante de ces deux forces, nous avons :

$$\vec{F}_P = \vec{F}_G + \vec{F}_C$$

D'après la définition du potentiel, il vient :

$$\vec{F}_G = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$$

Soit, en coordonnées polaires :

$$\vec{F}_G = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{\varphi}$$

en outre :

$$\vec{F}_C = \omega^2.r.\cos\varphi.\vec{x} = \omega^2.x.\vec{x} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(-\frac{\omega^2.x^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U_C$$

avec $U_C = -\dfrac{\omega^2.x^2}{2}$ = potentiel de rotation

D'après l'hypothèse (H5) nous devons avoir :

$$\vec{F}_P = F_P.\vec{u} = g.\vec{u} \qquad \text{(il est rappelé que m = 1 kg)}$$

or :

$$\begin{cases} -\vec{r} = \cos(\theta-\varphi).\vec{u} - \sin(\theta-\varphi).\vec{\theta} \\ -\vec{\varphi} = \sin(\theta-\varphi).\vec{u} + \cos(\theta-\varphi).\vec{\theta} \\ \;\;\vec{x} = -\cos\theta.\vec{u} + \sin\theta.\vec{\theta} \end{cases}$$

Donc, en réécrivant $\vec{F}_P$ en cordonnées polaires, nous obtenons après regroupement :

$$\begin{aligned} \vec{F}_P = & \left[\frac{\partial U}{\partial r}\cos(\theta-\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\sin(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\cos\varphi.\cos\theta\right]\vec{u} \\ & -\left[\frac{\partial U}{\partial r}\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cos(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\sin\varphi.\cos\theta\right]\vec{\theta} \\ = & \; F_P.\vec{u} \qquad \text{(par hypothèse)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{cases} F_P = g = \dfrac{\partial U}{\partial r}\cos(\theta-\varphi) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\sin(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\cos\varphi.\cos\theta \\ \quad\; 0 = \dfrac{\partial U}{\partial r}\sin(\theta-\varphi) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\cos(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\sin\varphi.\cos\theta \end{cases}}$$

Nous pourrions utiliser la deuxième relation du système (I) pour déterminer l'équation de la méridienne terrestre (voir calcul en annexe), mais il est plus adroit de conduire le calcul comme suit :

Puisque la force de pesanteur F_P s'exerçant sur une masse unité (F_P = g) est perpendiculaire en tout point à la surface terrestre :

En notant : $\overrightarrow{dP}$ = déplacement élémentaire quelconque <u>sur la surface terrestre</u>
U_P = potentiel total au point P

Nous avons : $\vec{F}_P \perp \overrightarrow{dP}$ => $\vec{F}_P.\overrightarrow{dP} = -dU_P = 0$ => $\mathbf{U_P = cte}$

=> La surface terrestre est donc une équipotentielle du champ de gravité.

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

Le potentiel total U_P en P a pour expression :

$$U_P = U + U_C = -\frac{G.M}{r}\left(1 + J_2\frac{a_e^2}{r^2}\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}\right) - \frac{\omega^2.r^2.\cos^2\varphi}{2}$$

En un point arbitraire de l'équateur ($\varphi = 0$ et $r = a_e$) le potentiel U_{P0} sera donné par :

$$U_{P0} = -\frac{G.M}{a_e}\left(1 + \frac{J_2}{2}\right) - \frac{\omega^2.a_e^2}{2}$$

Alors :

$$-\frac{G.M}{r}\left(1 + J_2\frac{a_e^2}{r^2}\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}\right) - \frac{\omega^2.r^2.\cos^2\varphi}{2} = -\frac{G.M}{a_e}\left(1 + \frac{J_2}{2}\right) - \frac{\omega^2.a_e^2}{2}$$

En divisant la relation ci-dessus par G.M, il vient :

$$-\frac{1}{r}\left(1 + J_2\frac{a_e^2}{r^2}\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}\right) - \frac{\omega^2.r^2.\cos^2\varphi}{2G.M} = -\frac{1}{a_e}\left(1 + \frac{J_2}{2}\right) - \frac{\omega^2.a_e^2}{2G.M}$$

Le terme J_2 étant très petit et la courbe méridienne de la surface terrestre étant très proche d'un cercle de rayon a_e, nous avons : $J_2.a_e^2/r^2 \cong J_2$.
De même, le terme $\omega^2.r^2/GM$ étant très petit, nous pourrons remplacer r par a_e et écrire : $\omega^2.r^2/GM \cong \omega^2.a_e^2/GM$. En outre, $\omega^2.r^2.\cos^2\varphi = \omega^2.x^2$. Donc, nous obtenons :

$$-\frac{1}{r}\left(1 + J_2\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}\right) - \frac{\omega^2.x^2}{2G.M} = -\frac{1}{a_e}\left(1 + \frac{J_2}{2}\right) - \frac{\omega^2.a_e^2}{2G.M}$$

Soit encore :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a_e} + J_2\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2a_e} + \frac{\omega^2.x^2}{2G.M} = \frac{J_2}{2a_e} + \frac{\omega^2.a_e^2}{2G.M}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{r}{a_e} - \frac{3}{2}J_2\frac{r}{a_e}(1 - \cos^2\varphi) + \frac{\omega^2.x^2}{2G.M}r = \frac{\omega^2.a_e^2}{2G.M}r$$

Comme : $J_2\frac{r}{a_e}\cos^2\varphi \approx J_2\frac{x^2}{r^2} \approx J_2\frac{x^2}{a_e^2}$, il vient :

$$\frac{r}{a_e}\left(1 + \frac{3}{2}J_2 + \frac{\omega^2.a_e^3}{2G.M}\right) = 1 + \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{\omega^2.a_e^3}{2G.M}\right)\frac{x^2}{a_e^2}$$

Puisque $r^2 = x^2 + z^2$ et compte tenu de la petitesse du terme $(3J_2 + \omega^2.a_e^3/GM)$, en élevant l'équation précédente au carré, nous trouvons :

$$\frac{x^2+z^2}{a_e^2}\left(1 + 3J_2 + \frac{\omega^2.a_e^3}{G.M}\right) \approx 1 + \left(3J_2 + \frac{\omega^2.a_e^3}{G.M}\right)\frac{x^2}{a_e^2}$$

En regroupant les termes en x^2, nous obtenons :

$$\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{z^2}{a_e^2}\left(1 + 3J_2 + \frac{\omega^2.a_e^3}{G.M}\right) \approx 1 \approx \frac{x^2}{a_e^2} + \frac{z^2}{a_e^2.\left(1 - 3J_2 - \frac{\omega^2.a_e^3}{G.M}\right)}$$

Ainsi, l'équation de la surface terrestre (ellipsoïde théorique) dans un plan méridien quelconque sera donnée par :

$$\boxed{\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{z^2}{a_e^2\left(1 - \frac{\omega^2a_e^3}{GM} - 3J_2\right)} = 1} \qquad (8)$$

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

C'est l'équation d'une ellipse d'équation générale cartésienne bien connue :

$$\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{z^2}{a_p^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad a_p^2 = a_e^2\left(1 - \frac{\omega^2 a_e^3}{GM} - 3J_2\right)$$

L'aplatissement terrestre α (très petit) est défini par la relation :

$$\alpha = \frac{a_e - a_p}{a_e} \qquad \Rightarrow \qquad a_p = a_e(1 - \alpha)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{a_e^2 - a_p^2}{a_e^2} = \frac{a_e - a_p}{a_e}\frac{a_e + a_p}{a_e} = \alpha.(2 - \alpha) = 2\alpha - \alpha^2$$

Soit : $-\alpha^2 + 2\alpha = \left(\frac{\omega^2 a_e^3}{GM} + 3J_2\right) \approx 2\alpha \quad (\text{car } \alpha << 1)$

L'aplatissement théorique terrestre noté α_{th}, compte tenu de nos hypothèses de travail, sera finalement donné par la relation :

$$\boxed{\alpha_{th} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 a_e^3}{GM} + 3J_2\right)} \qquad (9)$$

Calculons la valeur numérique de α_{th} :

$$\alpha_{th} = \frac{1}{2}\left(\frac{7{,}2923.10^{-10} \text{ x } 6.37814^3.10^{18}}{3.986005.10^{14}} + 3 \text{ x } 0.0010826\right) = \frac{1}{298.10}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_{th} = \frac{1}{298.10}$$

Nous pouvons en conclure que nos hypothèses et nos calculs sont bons, puisque la valeur trouvée α_{th} est très proche de la valeur expérimentale adoptée α qui est :

α = 1/298,257 2.

En particulier, la courbe méridienne de la surface terrestre est bien représentée par l'ellipse répondant à l'équation (8).

III. CALCUL DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR :

Intéressons-nous maintenant à la première équation du système (I) qui s'écrit :

$$F_p = g = \frac{\partial U}{\partial r}\cos(\theta - \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\sin(\theta - \varphi) - \omega^2.r.\cos\varphi.\cos\theta$$

Soit encore :

$$g = \frac{G.M}{r^2}\left(1 + 3\,J_2\frac{a_e^2}{r^2}\frac{1 - 3\sin^2\varphi}{2}\right).\cos(\theta - \varphi)$$
$$+ 3\,\frac{G.M}{r^4}a_e^2.J_2.\sin\varphi.\cos\varphi.\sin(\theta - \varphi) - \omega^2.r.\cos\varphi.\cos\theta$$

Nous savons maintenant que l'ellipsoïde terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des pôles dont l'équation méridienne a été trouvée plus haut. Nous allons donc nous servir de cette particularité.

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

En paramétrant l'ellipse avec l'angle λ, nous avons :

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi = a_e.\cos\lambda \\ y = r.\sin\varphi = a_p.\sin\lambda \end{cases}$$

Nous allons modifier l'équation donnant g de telle sorte de ne faire intervenir que l'angle θ, d'où un certain nombre de transformations que nous allons expliciter ci-après.

$$\cos(\theta-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta-\varphi)}} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = \frac{a_p}{a_e}\tan\lambda$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{z'_x} = -\frac{x'_\lambda}{z'_\lambda} = -\frac{-a_e\sin\lambda}{a_p\cos\lambda} = \frac{a_e}{a_p}\tan\lambda$$

Donc :

$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{a_e}{a_p}\left(1 - \frac{a_p^2}{a_e^2}\right)\sin\lambda.\cos\lambda$$

Or :

$$\sin\lambda.\cos\lambda = \frac{\tan\lambda}{1 + \tan^2\lambda} = \frac{a_p}{a_e}\,\frac{\sin\theta.\cos\theta}{1 - \frac{a_e^2 - a_p^2}{a_e^2}\sin^2\theta}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{\left(1 - \frac{a_p^2}{a_e^2}\right)\sin\theta.\cos\theta}{1 - \frac{a_e^2 - a_p^2}{a_e^2}\sin^2\theta}$$

Mais $\frac{a_e^2 - a_p^2}{a_e^2} = \alpha(2 - \alpha) \approx 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta-\varphi) \approx \alpha.\sin2\theta$

$\Rightarrow \quad \cos(\theta-\varphi) = 1$ (à α^2 près)

$$\sin(\theta-\varphi) = \frac{\tan(\theta-\varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta-\varphi)}} \approx \alpha.\sin2\theta$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{a_p^4}{a_e^4}\sin^2\theta}} \approx \cos\theta.(1+2\alpha.\sin^2\theta)$$

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \cos^2\theta.(1+2\alpha.\sin^2\theta)^2 \approx \sin^2\theta - 4\alpha.\sin^2\theta.\cos^2\theta$$

$$r^2 = a_e^2\cos^2\lambda + a_p^2\sin^2\lambda = a_e^2\cos^2\lambda\left(1 + \frac{a_p^2}{a_e^2}\tan^2\lambda\right)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = a_e^2\,\frac{1}{\left(1 + \frac{a_p^2}{a_e^2}\tan^2\theta\right)}\left(1 + \frac{a_p^4}{a_e^4}\tan^2\theta\right)$$

Or $\frac{a_e^4 - a_p^4}{a_e^4} = 1 - (1 - \alpha)^4 \approx 4\alpha$

Donc :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a_e^2}\,\frac{1 - 2\alpha.\sin^2\theta}{1 - 4\alpha.\sin^2\theta} \approx \frac{1 + 2\alpha.\sin^2\theta}{a_e^2}$$

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

Nous en déduisons alors :

$$g \approx \frac{G.M}{a_e^2}(1+2\alpha.\sin^2\theta)\left[1+3J_2\frac{1-3(\sin^2\theta-4\alpha.\sin^2\theta.\cos^2\theta)}{2}(1+2\alpha.\sin^2\theta)\right]$$
$$+3\frac{G.M}{a_e^2}(1+4\alpha.\sin^2\theta)\,J_2\sin\theta.(1-2\alpha.\cos^2\theta).\cos\theta.(1+2\alpha.\sin^2\theta)\mathrm{x}2\alpha.\sin\theta.\cos\theta$$
$$-\omega^2 a_e(1-\alpha.\sin^2\theta)(1+2\alpha.\sin^2\theta).\cos^2\theta$$

Après simplifications nous trouvons :

$$g \approx \frac{G.M}{a_e^2}(1+2\alpha.\sin^2\theta)\left(1+3J_2\frac{1-3\sin^2\theta}{2}\right)-\omega^2 a_e(1+\alpha.\sin^2\theta).\cos^2\theta$$

Soit encore :

$$g \approx \frac{G.M}{a_e^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2\right)-\omega^2 a_e+\frac{G.M}{a_e^2}\left(2\alpha-\frac{9}{2}J_2+\frac{\omega^2 a_e^3}{G.M}\right)\sin^2\theta-\alpha\,\omega^2 a_e\sin^2\theta\cos^2\theta$$

Pour $\theta = 0$, g prend la valeur de l'accélération de la pesanteur à l'équateur que nous désignerons par g_0. D'où :

$$\boxed{g_0=\frac{G.M}{a_e^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2\right)-\omega^2 a_e} \qquad (10)$$

Nous savons par ailleurs que :

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 a_e^3}{GM}+3J_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}J_2=\alpha-\frac{\omega^2 a_e^3}{2GM}$$

Donc :

$$g \approx g_0+\frac{G.M}{a_e^2}\left(2\alpha-3\alpha+3\frac{\omega^2 a_e^3}{2G.M}+\frac{\omega^2 a_e^3}{G.M}\right)\sin^2\theta-\alpha\,\omega^2 a_e\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad g \approx g_0+\frac{G.M}{a_e^2}\left(\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a_e^3}{G.M}-\alpha\right)\sin^2\theta-\frac{\alpha\,\omega^2 a_e}{4}\sin^2 2\theta$$

Compte tenu de la petitesse de J_2 et de $\omega^2 a_e$, nous avons :

$$\frac{G.M}{g_0\,a_e^2}\approx 1$$

Ainsi :

$$g=g_0\left[1+\left(\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a_e}{g_0}-\alpha\right)\sin^2\theta-\frac{\alpha\,\omega^2 a_e}{g_0}\sin^2\theta.\cos^2\theta\right]$$

En remplaçant $\cos^2\theta$ par $1-\sin^2\theta$, nous obtenons finalement après regroupement :

$$\boxed{g=g_0\left\{1+\left[\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a_e}{g_0}-\alpha\left(1+\frac{\omega^2 a_e}{g_0}\right)\right]\sin^2\theta+\frac{\alpha\,\omega^2 a_e}{g_0}\sin^4\theta\right\}} \qquad (11)$$

<u>Application numérique</u> :

$\omega = 7{,}292\ 115.10^{-5}$ rad.s^{-1}

$J_2 = 0{,}001\ 082\ 63$

Pour l'ellipsoïde de référence GRS80 :

$a_e = 6{,}378\ 137\ 10^6$ m

$\alpha = 1/298{,}2572$

$G.M = 3{,}986\ 005.10^{14}$ m^3.s^{-2}

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

$$=> \quad g_0 = \frac{G.M}{a_e^2}\left(1 + \frac{3}{2} J_2\right) - \omega^2 a_e = 9{,}780\ 28\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

$$=> \quad \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a_e}{g_0} - \alpha\left(1 + \frac{\omega^2 a_e}{g_0}\right) = 5{,}305\ 0.10^{-3}$$

$$=> \quad \frac{\alpha\ \omega^2 a_e}{g_0} = 1{,}16.10^{-5}$$

Soit : $\underline{g(\mathrm{m.s^{-2}}) = 9{,}780\ 28\ (1 + 5{,}305\ 0.10^{-3} \sin^2\theta + 1{,}16.10^{-5} \sin^4\theta)}$ (12)

La formule donnant g sur l'ellipsoïde de référence GRS80, en fonction de la latitude θ du lieu et déduite de <u>mesures expérimentales très précises</u> est, au 4ème ordre :

$$\mathbf{g(m.s^{-2}) = 9{,}780\ 326\ 7\ (1 + 5{,}278\ 9.10^{-3} \sin^2\theta + 2{,}329\ 5.10^{-5} \sin^4\theta)} \qquad \mathbf{(13)}$$

Nous pouvons constater que la relation découlant de nos calculs est très proche de la dernière relation, du moins jusqu'au 2ème ordre.
Il est rappelé que nous nous sommes arrêtés au terme en J_2 dans nos approximations, en négligeant les termes d'ordres supérieurs. Il est évident que les premiers termes négligés (contenant le coefficient J_4) sont du 4ème ordre et qu'ils influent beaucoup sur le coefficient numérique du terme en $\sin^4\theta$ (en l'occurrence nous trouvons une valeur qui est environ la moitié de la valeur réelle).

En calculant l'intensité de la pesanteur à Lyon et Cayenne pour l'ellipsoïde de référence GRS80 selon chacune des relations (12) ou (13) , nous trouvons :

Lyon => latitude θ_1 = 45°48' N ; gravité g_1
Cayenne => latitude θ_2 = 04°56' N ; gravité g_2

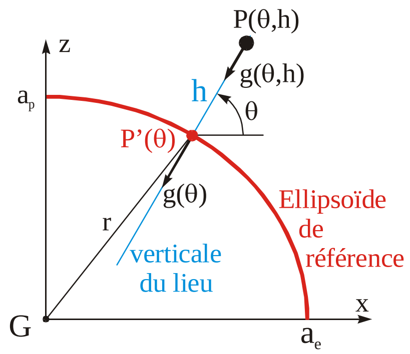
	Relation (13)	Relation (12)
$g_1(\mathrm{m.s^{-2}})$	**9,806 92**	9,806 98
$g_2(\mathrm{m.s^{-2}})$	**9,780 71**	9,780 66

Nous en concluons que notre relation est très satisfaisante, dans la plupart des cas, pour calculer l'intensité g de la pesanteur en tout point de l'ellipsoïde théorique.

IV. <u>CORRECTION D'ALTITUDE</u> :

En un point quelconque P' pris sur l'<u>ellipsoïde de référence</u> à la latitude θ, l'intensité de la pesanteur g(θ) est donnée par les relations (12) ou (13). Soit donc un point P, de masse m**,** situé à la distance d ≅ r+h du centre de la Terre (voir figure ci-après).

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE



La loi de la gravitation universelle permet d'écrire :

$$F = m.g(\theta,h) = m.GM/d^2 \quad \Rightarrow \quad g(\theta,r) = GM/(r+h)^2$$

Alors :

$$d^{-2} = (r + h)^{-2} = r^{-2}.(1 + h/r)^{-2} = r^{-2}.(1 + 2h/r + h^2/r^2)^{-1}$$

En supposant $0 \leq h << r$, nous pouvons écrire à l'ordre $(h/r)^2$ près : $d^{-2} = (1 - 2h/r)/r^2$

D'où :

$$g(\theta,h) = GM/r^2.(1 - 2h/r) = GM/r^2 - 2GM/r^3.h$$

En réalité, le terme simplifié GM/r^2 représente la valeur théorique de la gravité g(θ) calculée au point P', projection verticale du point P sur l'ellipsoïde de référence (voir figure ci-dessus), et le terme $2GM/r^3.h \cong 2GM/a_e^3.h$, la correction à apporter à g(θ) pour tenir compte de la hauteur h du point P.

Nous aurons donc : $\mathbf{g(\theta,h) = g(\theta)- 2GM/a_e^3.h = g(\theta)- \varepsilon.h}$

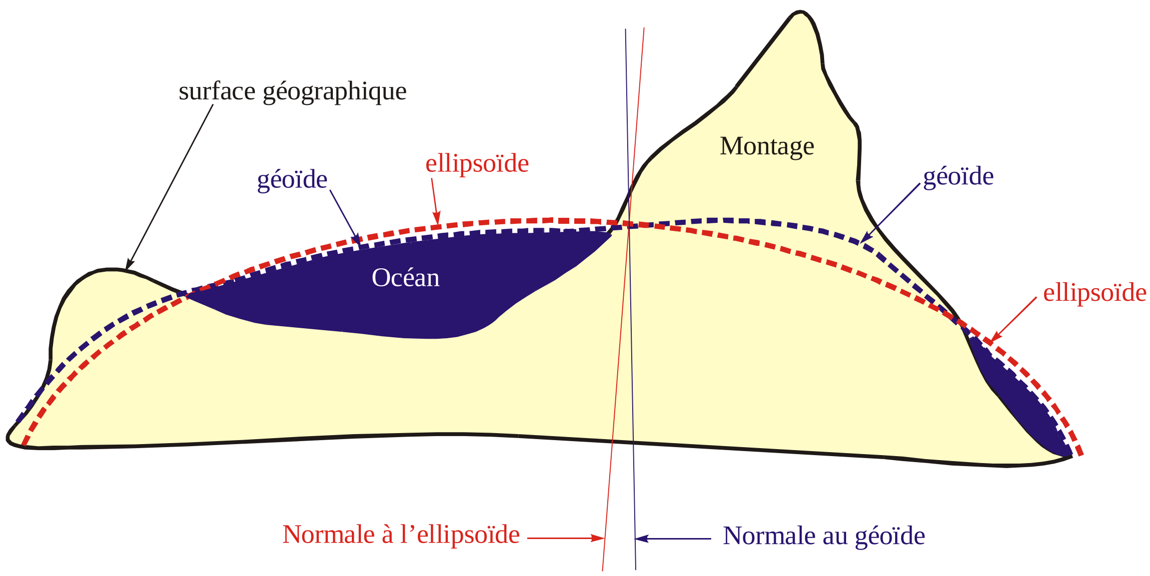
Valeur numérique de ε => $\varepsilon = 2 \times 3{,}986005.10^{14} / 6378137^3 = 3{,}07.10^{-6}\ s^{-2}$

En notant g(θ,h) simplement g_h nous aurons, par exemple avec la formule (13) :

$$\mathbf{g_h(m.s^{-2}) = 9{,}780\ 326\ 7\ (1 + 5{,}278\ 9.10^{-3}\ \sin^2\theta + 2{,}329\ 5.10^{-5}\ \sin^4\theta) - 3{,}07.10^{-6}\ h(m) \qquad (13')}$$

V. FORME DE LA TERRE (NOTIONS ÉLÉMENTAIRES) :

La surface terrestre à une forme complexe irrégulière (et changeante) qui n'admet pas de modélisation parfaite. Aussi des formes plus simples se rapprochant globalement au mieux de la surface terrestre ont été définies ou élaborées.



CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

1 – Le Géoïde :

Par définition c'est la surface équipotentielle du champ de gravité correspondant à la position moyenne de la surface des océans (80 % de la surface), supposés calmes et sans marées, et se poursuivant sous les masses continentales. C'est une surface physique relativement complexe car affectée par la distribution réelle non symétrique des masses internes.

Cette surface de référence unique, le géoïde, représente l'altitude 0; elle sert donc de référence pour le calcul des altitudes.

2 – L'Ellipsoïde de révolution :

C'est une surface mathématique simple et de révolution, engendrée par la rotation d'une ellipse autour de l'axe des pôles terrestres, se rapprochant le plus possible du géoïde défini plus haut.

En première approximation c'est la forme que prendrait la surface libre d'un océan unique qui recouvrirait entièrement la terre supposée à symétrie cylindrique telle que nous l'avons calculée plus haut.

Cette surface de référence globale sert à positionner chaque point de la surface terrestre (latitude λ, longitude φ).

Il existe par ailleurs de nombreux autres ellipsoïdes élaborés pour épouser au mieux le géoïde dans une région donnée (meilleure représentation locale d'une région, d'un pays, d'un continent). Ils ont tous des caractéristiques mathématiques différentes et ne sont valables et exploitables que pour les zones qu'ils sont sensés représenter.

Bien entendu, le géoïde ou les différents ellipsoïdes ne sont que des représentations approximatives plus ou moins précises de la réalité.

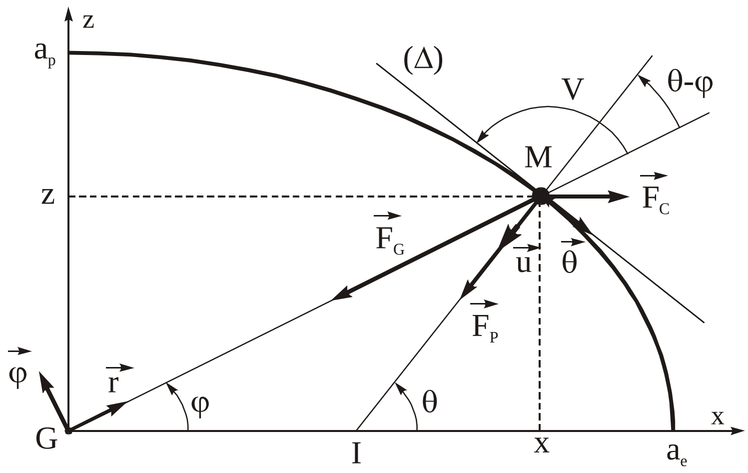
CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

ANNEXE

ÉQUATION DE LA MÉRIDIENNE TERRESTRE :

θ : latitude du point M

(Δ) : droite tangente à la méridienne au point M



$$(\mathrm{I})\quad \boxed{\begin{cases} F_P = g = \dfrac{\partial U}{\partial r}\cos(\theta-\varphi) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\sin(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\cos\varphi.\cos\theta \\ 0 = \dfrac{\partial U}{\partial r}\sin(\theta-\varphi) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\cos(\theta-\varphi) - \omega^2.r.\sin\varphi.\cos\theta \end{cases}}$$

Servons-nous de la deuxième relation du système (I) pour déterminer l'équation de la méridienne terrestre.

Puisque $U = -\dfrac{G.M}{r}\left(1 + J_2\dfrac{a_e^2}{r^2}\dfrac{1-3\sin^2\varphi}{2}\right)$, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{G.M}{r^2}\left(1 + 3\,J_2\dfrac{a_e^2}{r^2}\dfrac{1-3\sin^2\varphi}{2}\right) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 3\dfrac{G.M}{r^4}\,a_e^2.J_2.\sin\varphi.\cos\varphi \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{G.M}{r^2}\left\{\sin(\theta-\varphi) + \frac{3}{2}J_2\frac{a_e^2}{r^2}\left[\left(1-3\sin^2\varphi\right).\sin(\theta-\varphi) - \sin2\varphi.\cos(\theta-\varphi)\right]\right\} = \omega^2.r.\cos\varphi.\sin\theta$$

Traduisons cette expression en coordonnées cartésiennes.
Nous avons (coordonnées polaires r,φ) :

$$\tan V = \frac{r}{r'_\varphi} \quad \text{(voir figure)}$$

or $\quad V = \dfrac{\pi}{2} + \theta - \varphi \quad \Rightarrow \quad -\tan V = \dfrac{1}{\tan(\theta-\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tan(\theta-\varphi) = -\dfrac{r'_\varphi}{r}}}$

En outre :

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

$$\tan\theta = -\frac{1}{z'_x} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{z}{x}$$

Nous avons donc aussi, toutes réductions faites :

$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{z.z'_x + x}{z - x.z'_x}$$

Nous avons $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x}}$ (avec $z'_x \leqslant 0$)

De plus $\frac{1}{\cos(\theta-\varphi)} = \sqrt{1+\tan^2(\theta-\varphi)} = \sqrt{1+\left(\frac{z.z'_x+x}{z-x.z'_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x^2+z^2)(1+z'^2_x)}{(z-x.z'_x)^2}}$

Comme $z'_x \leqslant 0$, $z \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ dans le domaine considéré, il vient :

$$\frac{1}{\cos(\theta-\varphi)} = \sqrt{x^2+z^2}.\frac{\sqrt{1+z'^2_x}}{y - x.z'_x}$$

$\cos(\theta-\varphi)$ n'étant jamais nul, nous obtenons en multipliant notre équation par $\cos^{-1}(\theta-\varphi)$:

$$\tan(\theta-\varphi) + \frac{3}{2}J_2\frac{a_e^2}{r^2}\left[\left(1-3\sin^2\varphi\right).\sin(\theta-\varphi) - \sin2\varphi.\cos(\theta-\varphi)\right] = \frac{\omega^2.r^3}{G.M}\frac{\cos\varphi.\sin\theta}{\cos(\theta-\varphi)}$$

Bien entendu, $r^2 = x^2 + z^2$. Donc nous pouvons écrire finalement :

$$\frac{z.z'_x+x}{z-x.z'_x} + \frac{3}{2}J_2\left[\left(1-\frac{3z^2}{x^2+z^2}\right)\frac{z.z'_x+x}{z-x.z'_x} - \frac{2x.z}{x^2+z^2}\right]\frac{a_e^2}{x^2+z^2}$$

$$= \frac{\omega^2.(x^2+z^2)^{3/2}}{G.M}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x}}\frac{\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{1+z'^2_x}}{z-x.z'_x} = \frac{\omega^2.x}{G.M}\frac{(x^2+z^2)^{3/2}}{z-x.z'_x}$$

Soit encore :

$$z.dz + x.dx + \frac{3}{2}J_2.\left[\left(1-\frac{3z^2}{x^2+z^2}\right).(z.dz+x.dx) - 2\frac{x.z}{x^2+z^2}.(z.dx - x.dz)\right]\frac{a_e^2}{x^2+z^2}$$

$$= \frac{\omega^2.x}{G.M}.(x^2+z^2)^{3/2}dx$$

Nous allons pouvoir simplifier cette dernière équation. En effet, $J_2 << 1$ et la courbe méridienne de la surface terrestre est très proche d'un cercle d'équation :

$$x^2+z^2 = Cte$$

Dans ce cas, il vient : $xdx + zdz = 0$; dans la réalité nous aurons $xdx + zdz = \varepsilon$. ($\varepsilon << 1$).
Nous voyons que nous pouvons négliger le premier terme entre crochets au 2ème ordre près.

L'équation peut donc s'écrire dans cette hypothèse :

$$\frac{1}{2}d(z^2+x^2) - 3J_2\frac{a_e^2xz}{(x^2+z^2)^2}(zdx - xdz) = \frac{\omega^2}{2G.M}\left(x^2+z^2\right)^{3/2}dx^2$$

Le deuxième terme du membre de gauche de l'équation ci-dessus étant petit, nous pourrons assimiler les coordonnées x et z à celles d'un cercle de rayon a_e.

$$x^2+z^2 = a_e^2 \quad => \quad -zdz = xdx$$

Donc pour ce terme nous avons : $xz(zdx - xdz) = xz^2dx - x^2zdz$,
En remplaçant $-zdz$ par sa valeur, il vient :

$$xz(zdx - xdz) = xz^2dx + x^3dx = (x^2+z^2)xdx = a_e^2xdx$$

D'où, en modifiant le membre de gauche et après simplifications, l'équation devient :

CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

$$\frac{1}{2}\frac{d(z^2+x^2)}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} = d\left(\frac{\omega^2 x^2}{2GM}\right) + \frac{3}{2}J_2\frac{dx^2}{a_e^{\ 3}}$$

Ainsi :

$$d\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = d\left(\frac{\omega^2 x^2}{2GM} + \frac{3}{2}J_2\frac{x^2}{a_e^{\ 3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{\omega^2 x^2}{2GM} + \frac{3}{2}J_2\frac{x^2}{a_e^{\ 3}} = Cte$$

Pour $z = 0$, $x = a_e$; donc :

$$\frac{1}{a_e} + \frac{\omega^2 a_e^{\ 2}}{2GM} + \frac{3}{2}\frac{J_2}{a_e} = Cte$$

En remplaçant dans l'équation la constante par sa valeur, nous obtenons après regroupement :

$$\frac{a_e}{\sqrt{x^2+z^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} + 3J_2\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_e^{\ 2}}\right)$$

Puisque $\frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} + 3J_2 << 1$, nous pouvons écrire :

$$\frac{a_e^{\ 2}}{x^2+z^2} \approx 1 + \left(\frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} + 3J_2\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_e^{\ 2}}\right)$$

Soit encore, en prenant l'inverse :

$$\frac{x^2}{a_e^{\ 2}} + \frac{z^2}{a_e^{\ 2}} \approx 1 - \left(\frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} + 3J_2\right) + \left(\frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} + 3J_2\right)\frac{x^2}{a_e^{\ 2}}$$

Ainsi, l'équation de la surface terrestre (ellipsoïde théorique) dans un plan méridien quelconque sera telle que :

$$\boxed{\frac{x^2}{a_e^{\ 2}} + \frac{z^2}{a_e^{\ 2}\left(1 - \frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} - 3J_2\right)} = 1} \qquad (8)$$

C'est l'équation d'une ellipse d'équation générale cartésienne bien connue :

$$\frac{x^2}{a_e^{\ 2}} + \frac{z^2}{a_p^{\ 2}} = 1 \qquad \text{avec} \qquad a_p^{\ 2} = a_e^{\ 2}\left(1 - \frac{\omega^2 a_e^{\ 3}}{GM} - 3J_2\right)$$