

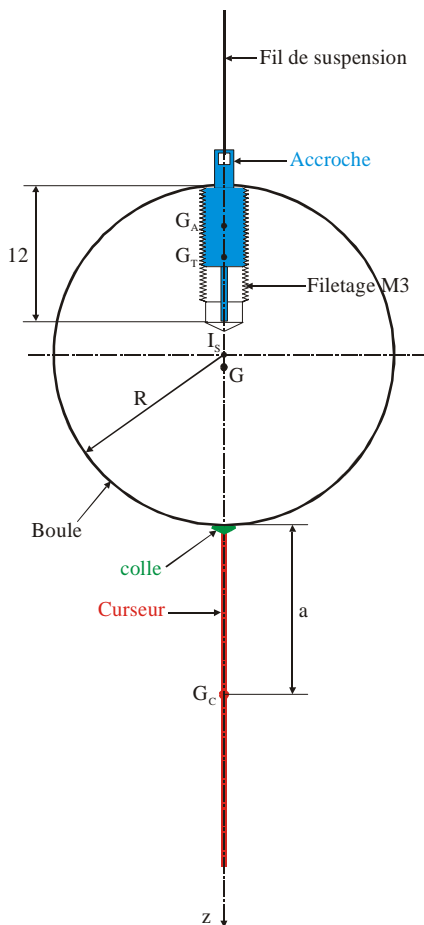
PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

I – INTRODUCTION :

Ce pendule mécanique est constitué d'une sphère métallique de diamètre $D = 2 R$ taraudée au diamètre M3 et sur une profondeur de 12 mm. Ce taraudage reçoit une petite pièce filetée qui sert de point de suspension. De plus un petit segment métallique est collé sous la sphère oscillante pour servir de curseur venant couper alternativement le faisceau du chronocapteur Jeulin (comptage automatique des oscillations). Nous désignerons par :

- $m_S > 0$ la masse fictive de la sphère considérée comme pleine
- $m_T < 0$ la masse de la matière enlevée par taraudage
- $m_A > 0$ la masse de la petite pièce servant d'accrochage du fil de nylon
- $m_C > 0$ la masse du curseur

Ce pendule ne peut pas être considéré comme un pendule simple au sens physique et mathématique (point matériel et oscillations infiniment petites) car on désire atteindre une précision de l'ordre de quelques $10^{\text{ème}}$ de mm sur la longueur de celui-ci. Le moment d'inertie J du pendule ainsi réalisé sera la somme des moments d'inertie partiels des masses m_S , m_T , m_A et m_C . Puisque nous voulons obtenir des mesures très précises sur les périodes du pendule réel, il nous faut également connaître de façon aussi précise le moment d'inertie du système oscillant, ainsi que la position réelle de son centre d'inertie G .



- I_S : Centre de la sphère **pleine** (masse $m_S > 0$)
- G_A : CDG du système d'accrochage du fil (masse $m_A > 0$)
- G_T : CDG de la partie taraudée (masse $m_T < 0$)
- G_C : CDG du curseur (masse $m_C > 0$)
- G : CDG de la partie oscillante (masse $M > 0$)

Pour les calculs, l'axe vertical descendant z sera centré en I_S .

Nous avons :

$$M = m_S + m_T + m_A + m_C$$

$$\overline{I_S G} = z_G ; \quad \overline{I_S G_T} = z_T ; \quad \overline{I_S G_A} = z_A ; \quad \overline{I_S G_C} = z_C$$

$$M \cdot z_G = m_T \cdot z_T + m_A \cdot z_A + m_C \cdot z_C$$

$$\text{Soit : } \boxed{\overline{I_S G} = z_G = \frac{m_T \cdot z_T + m_A \cdot z_A + m_C \cdot z_C}{m_S + m_T + m_A + m_C}}$$

Mesures effectuées le 16/01/2007 :

$$m'_S = m_S + m_T = 118,28 \text{ g} ; \quad m_T = -1,05 \text{ g} \Rightarrow m_S = 119,33 \text{ g}$$

$$m_C = 0,20 \text{ g}$$

$$m_A = 0,46 \text{ g} ; \quad a = 14,5 \text{ mm}$$

$$z_T = -(15 - 12/2) = -9 \text{ mm}$$

$$z_A = -13,5 \text{ mm (valeur estimée)}$$

$$z_C = R + a = 29,5 \text{ mm}$$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

II - CALCUL PRÉCIS DE LA POSITION DU CENTRE D'INERTIE G DE L'ENSEMBLE :

Le volume du trou taraudé est : $v_T = \pi d^2 l / 4 = \pi / 4 \times 3,65^2 \times 12 = 125,56 \text{ mm}^3$

Le volume de la sphère pleine est : $V_S = 4/3 \pi R^3 = 4/3 \pi \times 15^3 = 14\,137,17 \text{ mm}^3$

Le volume de la sphère taraudée est : $V'_S = V_S - v_T = 14\,011,61 \text{ mm}^3$

La masse volumique de la matière constituant la boule est : $\rho = m'_S / V'_S = 8\,441,6 \text{ kg.m}^{-3}$

D'où la masse manquante du taraudage : $m_T = -\rho v_T = -1,05 \text{ g} \Rightarrow m_T = -1,05 \text{ g}$.

La position du centre d'inertie G du système oscillant est telle que : $M z_G = m_T z_T + m_A z_A + m_C z_C$

Ainsi, le centre d'inertie G de la partie oscillante sera situé à la distance z_G du centre géométrique I_S de la sphère tel que $z_G = \overline{I_S G}$ vérifie la relation suivante :

$$z_G = \frac{m_T z_T + m_A z_A + m_C z_C}{m_S + m_T + m_A + m_C}$$

Données expérimentales :

$$m_S = 118,28 + 1,05 = 119,33 \text{ g}$$

$$m_A = 0,46 \text{ g} ; z_A = -13,5 \text{ mm (valeur estimée)}$$

$$m_T = -1,05 \text{ g (valeur calculée)} ; z_T = 15 - 12/2 = -9 \text{ mm}$$

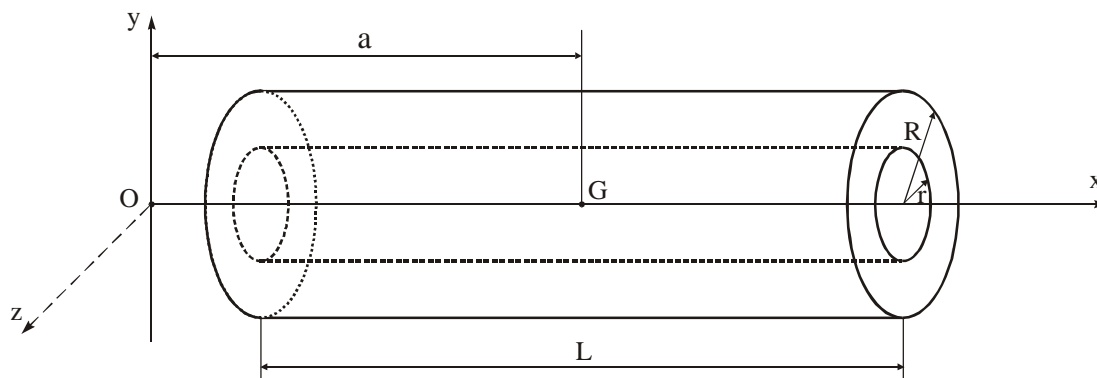
$$m_C = 0,20 \text{ g} ; z_C = R + a = 29,5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow M = m_S + m_A + m_T + m_C = 118,94 \text{ g}$$

$$z_G = \frac{-1,05 \times (-9) + 0,46 \times (-13,5) + 0,20 \times 29,5}{118,94} = 0,077 \cong 0,08 \text{ mm} \Rightarrow z_G = 0,08 \text{ mm}$$

\Rightarrow G se trouve **8/100 de mm en dessous** du centre géométrique I_S de la sphère.

III - CALCUL PRÉCIS DU MOMENT D'INERTIE :



On peut démontrer assez facilement que le moment d'inertie d'une tige cylindrique creuse, de masse m , par rapport à une droite \perp à l'axe de la tige et située à la distance a du centre d'inertie G de cette tige (voir dessin ci-dessus) est donné par l'expression : $I_{Oz} = ma^2 \left[1 + \frac{L^2 + 3(R^2 + r^2)}{12a^2} \right]$.

Si la tige est pleine ($r = 0$), le moment d'inertie devient : $I_{Oz} = ma^2 \left[1 + \frac{L^2 + 3R^2}{12a^2} \right]$.

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

C'est cette dernière formule dont nous nous servirons pour calculer les moments d'inertie de la petite pièce d'accrochage du fil nylon, du filetage dans la sphère (masse $m_T < 0$) et du curseur. Les moments d'inertie partiels s'écrivent :

Pour la sphère pleine :
$$J_{o(m_s)} = m_s L_s^2 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L_s^2} \right)$$

Pour le trou taraudé :
$$J_{o(m_T)} = m_T L_T^2 \left(1 + \frac{l_T^2 + 3r_T^2}{12L_T^2} \right)$$

Pour la pièce d'accrochage :
$$J_{o(m_A)} = m_A L_A^2 \left(1 + \frac{l_A^2 + 3r_A^2}{12L_A^2} \right)$$

Pour le curseur :
$$J_{o(m_C)} = m_C L_C^2 \left(1 + \frac{l_C^2 + 3r_C^2}{12L_C^2} \right)$$

En notant : $\overline{OG} = L_G$ et $\overline{OI_s} = L_s$; $\overline{OG_T} = L_T$; $\overline{OG_A} = L_A$ et $\overline{OG_C} = L_C$, nous avons :

$$L_s = L_G - z_G = L_G(1 - z_G/L_G) = L_G(1 - \varepsilon_s) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_s| \ll 1$$

nous poserons encore :

$$L_T = L_G + \overline{GG_T} = L_G + y_T = L_G(1 + y_T/L_G) = L_G(1 + \varepsilon_T) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_T| \ll 1$$

$$L_A = L_G + \overline{GG_A} = L_G + y_A = L_G(1 + y_A/L_G) = L_G(1 + \varepsilon_A) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_A| \ll 1$$

$$L_C = L_G + \overline{GG_C} = L_G + y_C = L_G(1 + y_C/L_G) = L_G(1 + \varepsilon_C) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_C| \ll 1$$

Alors :
$$J_{o(m_s)} = m_s L_G^2 (1 - \varepsilon_s)^2 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L_s^2} \right) = m_s L_G^2 \left[(1 - \varepsilon_s)^2 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L_G^2} \right]$$

$$J_{o(m_T)} = m_T L_G^2 (1 + \varepsilon_T)^2 \left(1 + \frac{l_T^2 + 3r_T^2}{12L_T^2} \right) = m_T L_G^2 \left[(1 + \varepsilon_T)^2 + \frac{l_T^2 + 3r_T^2}{12L_G^2} \right]$$

$$J_{o(m_A)} = m_A L_G^2 (1 + \varepsilon_A)^2 \left(1 + \frac{l_A^2 + 3r_A^2}{12L_A^2} \right) = m_A L_G^2 \left[(1 + \varepsilon_A)^2 + \frac{l_A^2 + 3r_A^2}{12L_G^2} \right]$$

$$J_{o(m_C)} = m_C L_G^2 (1 + \varepsilon_C)^2 \left(1 + \frac{l_C^2 + 3r_C^2}{12L_C^2} \right) = m_C L_G^2 \left[(1 + \varepsilon_C)^2 + \frac{l_C^2 + 3r_C^2}{12L_G^2} \right]$$

Notons : $\frac{2}{5} \frac{R^2}{L_G^2} = \varepsilon'_s$; $\frac{l_T^2 + 3r_T^2}{12L_G^2} = \varepsilon'_T$; $\frac{l_A^2 + 3r_A^2}{12L_G^2} = \varepsilon'_A$; $\frac{l_C^2 + 3r_C^2}{12L_G^2} = \varepsilon'_C$

Le moment d'inertie total $J_{o(M)}$ devient :

$$J_{o(M)} = m_s L_G^2 [(1 - \varepsilon_s)^2 + \varepsilon'_s] + m_T L_G^2 [(1 + \varepsilon_T)^2 + \varepsilon'_T] + m_A L_G^2 [(1 + \varepsilon_A)^2 + \varepsilon'_A] + m_C L_G^2 [(1 + \varepsilon_C)^2 + \varepsilon'_C]$$

$$\frac{J_{o(M)}}{L_G^2} = m_s(1 + \varepsilon'_s - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + m_T(1 + \varepsilon'_T + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(1 + \varepsilon'_A + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(1 + \varepsilon'_C + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)$$

$$\frac{J_{o(M)}}{L_G^2} = (m_s + m_T + m_A + m_C) + m_s(\varepsilon'_s - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + m_T(\varepsilon'_T + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(\varepsilon'_A + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(\varepsilon'_C + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)$$

$$\frac{J_{o(M)}}{ML_G^2} = 1 + \frac{m_s}{M}(\varepsilon'_s - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + \frac{m_T(\varepsilon'_T + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(\varepsilon'_A + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(\varepsilon'_C + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)}{M}$$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

Finalement, le moment d'inertie $J_{O}(M)$ aura pour expression :

$$J_{O}(M) = ML_G^2 \left[1 + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + \frac{m_T(\varepsilon_T' + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(\varepsilon_A' + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(\varepsilon_C' + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)}{M} \right]$$

IV - CALCUL DE LA PÉRIODE T DU PENDULE :

La période T d'un pendule ayant une amplitude d'oscillations **non amorties** θ_0 petite, est reliée à la période T_0 du même pendule en oscillations infiniment petites par la relation : $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$

Pour notre pendule nous avons la relation bien connue : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{O}}{MgL_G}}$

Donc, la période réelle T de ce pendule (oscillations $\pm\theta_0$) est donné par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{O}}{MgL_G} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)} \Rightarrow \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{J_{O}}{ML_G} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} \right)$$

Considérons un pendule simple, de longueur $L_{\text{éq}}$, effectuant des oscillations **infiniment petites** (oscillations isochrones). Sa période sera donnée par la relation simple suivante :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{éq}}}{g}} \Rightarrow L_{\text{éq}} = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Associons alors au pendule réel, un pendule simple de longueur $L_{\text{éq}}$ en oscillations infiniment petites ayant même période T que le pendule réel. Il vient : $\frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{J_{O}}{ML_G} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} \right) = L_{\text{éq}}$

En remplaçant J_{O} par sa valeur littérale, nous obtenons :

$$\frac{J_{O}(M)}{ML_G} = L_G \left[1 + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + \delta \right]$$

$$\text{avec } \delta = \frac{m_T(\varepsilon_T' + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(\varepsilon_A' + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(\varepsilon_C' + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)}{M}$$

Nous pouvons donc écrire : $L_{\text{éq}} = L_G \left[1 + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) + \delta \right] \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} \right)$

Soit encore, en tenant compte que les termes correcteurs sont très petits :

$$L_G = L_{\text{éq}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) - \delta \right] \Rightarrow L_G < L_{\text{éq}}$$

=> La longueur L_G du pendule réel sera toujours plus petite que celle du pendule simple équivalent à oscillations infiniment petites.

Ce qui est accessible à nos mesures de longueur c'est L_S et non L_G . Nous exprimerons donc L_G en fonction de L_S . Or nous savons que : $L_S = L_G (1 - \varepsilon_s)$. En multipliant l'expression ci-dessus par le facteur $(1 - \varepsilon_s)$ et en simplifiant (car $\varepsilon_s \ll 1$), nous obtenons ci-après l'expression donnant L_S :

$$L_S = L_{\text{éq}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) - \delta - \varepsilon_s \right]$$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

En particulier, si nous supposons que $m_T = m_A = m_C = 0$, le pendule considéré ne sera constitué que de la sphère pleine de masse $M = m_S$. Nous aurons alors : $z_C = 0 \Rightarrow \varepsilon_S = \delta = 0$, et :

$$L_S = L_{\text{éq}} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{2}{5} \frac{R^2}{L_G^2} \right)$$

Données expérimentales :

$M = 118,94 \text{ g}$; $m_S = 119,33 \text{ g}$; $m_T = -1,05 \text{ g}$; $m_A = 0,46 \text{ g}$; $m_C = 0,20 \text{ g}$
 $L_G \cong L_{\text{éq}} = 993,60 \text{ mm}$; $l_A = 6 \text{ mm}$; $l_T = 12 \text{ mm}$; $l_C = 29 \text{ mm}$
 $z_G = 0,08 \text{ mm}$; $y_T = \overline{GG_T} = -9 \text{ mm}$; $y_A = \overline{GG_A} = -13,5 \text{ mm}$; $y_C = \overline{GG_C} = 29,5 \text{ mm}$
 $r_T = r_A = 3,6 \text{ mm}$; $r_C = 1/2 \text{ mm}$; $\theta_0 = 4^\circ = 0,0698 \text{ 13 rd}$
 D'où les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S' &= \frac{2}{5} \frac{R^2}{L_G^2} = \frac{2}{5} \frac{15^2}{993,60^2} = 9 \cdot 10^{-5} & ; & \quad \varepsilon_T' = \frac{l_T^2 + 3r_T^2}{12L_G^2} = \frac{12^2 + 3 \times 3,6^2}{12 \times 993,60^2} = 1,5 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_A' &= \frac{l_A^2 + 3r_A^2}{12L_G^2} = \frac{6^2 + 3 \times 3,6^2}{12 \times 993,60^2} = 6 \cdot 10^{-6} & ; & \quad \varepsilon_C' = \frac{l_C^2 + 3r_C^2}{12L_G^2} = \frac{29^2 + 1^2}{12 \times 993,60^2} = 7 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_S &= \frac{z_G}{L_G} = \frac{0,08}{993,60} = 8 \cdot 10^{-5} \quad (\varepsilon_S^2 \approx 0) & ; & \quad \varepsilon_T = \frac{y_T}{L_G} = \frac{-9}{993,60} = -9,1 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_C &= \frac{y_C}{L_G} = \frac{29,5}{993,60} = 2,97 \cdot 10^{-2} & ; & \quad \varepsilon_A = \frac{y_A}{L_G} = \frac{-13,5}{993,60} = -1,36 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

1 - Longueur L_{S1} du pendule réel battant la seconde à **Lyon** :

Altitude du lieu de l'expérience : $h \cong 173 \text{ m}$ (ENS-Sciences de Lyon)

Accélération de la pesanteur à Lyon pour $h=0 \Rightarrow g_{01} = 9,806 \text{ 9 m.s}^{-2}$

Rayon moyen de la Terre : $R = 6 \text{ 370 km}$

Accélération de la pesanteur pour le lieu de l'expérience : $g_1 \cong g_{01}(1 - 2h/R)$

$$\Rightarrow \mathbf{g_1 = 9,806 \text{ 4 m.s}^{-2}}$$

$T = 2 \text{ s}$; $R = 15 \text{ mm}$; $g_1 = 9,806 \text{ 4 m.s}^{-2}$; $\theta_0 = 4^\circ = 0,0698 \text{ 13 rad}$

Alors : $L_{\text{éq1}} = \frac{g_1 T^2}{4 \pi^2} = \frac{9,8064 \times 2^2}{4 \pi^2} = 0,993 \text{ 60 m} \Rightarrow \mathbf{L_{\text{éq1}} = 993,60 \text{ mm}}$

Calcul des termes correcteurs :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{m_T(\varepsilon_T' + 2\varepsilon_T + \varepsilon_T^2) + m_A(\varepsilon_A' + 2\varepsilon_A + \varepsilon_A^2) + m_C(\varepsilon_C' + 2\varepsilon_C + \varepsilon_C^2)}{M} \\ &= \frac{-1,05 \times (1,5 \cdot 10^{-5} - 2 \times 0,0091 + 0,0091^2) + 0,46 \times (6 \cdot 10^{-6} - 2 \times 0,0136 + 0,0136^2) + 0,2 \times (7 \cdot 10^{-5} + 2 \times 0,0297 + 0,0297^2)}{118,94} \\ &= \frac{0,0187}{118,94} \cong 1,6 \cdot 10^{-4} = \delta \end{aligned}$$

et

$$\frac{m_S}{M}(\varepsilon_S' - 2\varepsilon_S + \varepsilon_S^2) = \frac{119,33}{118,94} \times (9 \cdot 10^{-5} - 2 \times 8 \cdot 10^{-5}) = -7 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad \frac{\theta_0^2}{8} = \frac{0,069813^2}{8} \approx 6,1 \cdot 10^{-4}$$

Alors : $L_{S1} = 993,60 \times (1 - 6,1 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} - 1,6 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-5}) \cong 992,8 \text{ mm}$

$$\Rightarrow \mathbf{L_{S1} = 992,8 \text{ mm}}$$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

2 - Longueur L_{S2} du pendule réel battant la seconde à **Cayenne (altitude $h \cong 0$ m)** :

$$T = 2 \text{ s} ; R = 15 \text{ mm} ; g_2 = 9,7807 \text{ m.s}^{-2} ; \theta_0 = 4^\circ = 0,069813 \text{ rad}$$

$$\text{Alors : } L_{\text{éq2}} = \frac{g_2 T^2}{4 \pi^2} = \frac{9,7807 \times 2^2}{4 \pi^2} = 0,99099 \text{ m} \Rightarrow \boxed{L_{\text{éq2}} = 991,00 \text{ mm}}$$

$$\text{Et : } L_{S2} = 991,00 \times (1 - 6,1 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} - 1,6 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-5}) \cong 990,2 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \underline{L_{S1} = 990,2 \text{ mm}}$$

La longueur L_S du pendule réel est donc plus courte de 0,8 mm par rapport à celle ($L_{\text{éq}}$) du pendule simple équivalent oscillant avec un angle infiniment petit.

V - MESURES EXPÉRIMENTALES :

1 - Mesures du jeudi 15 février 2007 :

Les diverses distances L_i ont été obtenues en utilisant le **cathétomètre** du laboratoire de physique (précision meilleure que le $10^{\text{ème}}$ de mm). C'est un appareil de mesure précis qui permet de déterminer une dimension verticale par différence de lectures de deux hauteurs. Nous désignerons par :

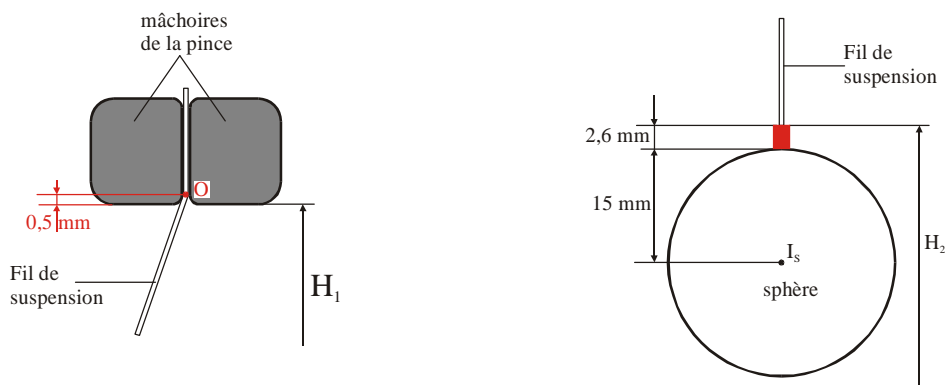
H_1 : la hauteur de la base inférieure des mâchoires de la pince support,

H_2 : la hauteur de la partie supérieure de la pièce d'accrochage,

$h = 2,6 \text{ mm}$: hauteur de la partie de la pièce d'accrochage émergeant du haut de la sphère,

$R = 15 \text{ mm}$: le rayon de la sphère.

En outre le système mécanique de suspension en O n'est pas parfait. De ce fait il faut ajouter à la hauteur H_1 lue **0,5 mm** (estimation) dû au fait que les mâchoires de la pince de fixation ne sont pas rigoureusement à angle droit, mais présentent un petit arrondi.



$$\text{On a donc : } L_S = (H_1 + 0,5) - H_2 + (R + h)$$

Mesures 1 :

$$H_1 = 1245,57 \text{ mm} \text{ et } H_2 = 274,80 \Rightarrow L_1 = (1245,57 + 0,5) - 274,80 + 17,6 = \underline{\underline{988,9 \text{ mm}}}$$

$$500 T_1 = 16 \text{ mn } 38,02 \text{ s} \Rightarrow \underline{\underline{T_1 = 1,9960 \text{ s}}}$$

Mesures 2 :

$$H_1 = 1245,60 \text{ mm} \text{ et } H_2 = 270,00 \text{ mm} \Rightarrow L_2 = (1245,60 + 0,5) - 270,00 + 17,6 = \underline{\underline{993,7 \text{ mm}}}$$

$$500 T_2 = 16 \text{ mn } 40,30 \text{ s} \Rightarrow \underline{\underline{T_2 = 2,0006 \text{ s}}}$$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

Mesures 3 :

$$H_1 = 1245,16 \text{ mm et } H_2 = 265,38 \text{ mm} \Rightarrow L_3 = (1\,245,16 + 0,5) - 265,38 + 17,6 = \underline{\underline{997,9 \text{ mm}}}$$

$$500 T_3 = 16 \text{ mn } 42,54 \text{ s} \Rightarrow \underline{\underline{T_3 = 2,005 \text{ s}}}$$

Mesures 4 :

$$H_1 = 1245,40 \text{ mm et } H_2 = 260,60 \text{ mm} \Rightarrow L_4 = (1\,245,40 + 0,5) - 260,60 + 17,6 = \underline{\underline{1\,002,9 \text{ mm}}}$$

$$500 T_4 = 16 \text{ mn } 45,23 \text{ s} \Rightarrow \underline{\underline{T_4 = 2,010 \text{ s}}}$$

2 – Traitement des données :

En reprenant la relation donnant L_S en fonction de $L_{\text{éq}}$, dans le cas du pendule réel, nous pouvons écrire :

$$L_S = L_{\text{éq}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) - \delta - \varepsilon_s \right] \cong \frac{gT^2}{4\pi^2} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s) - \delta - \varepsilon_s \right]$$

Soit encore : $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left[1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s) + \delta + \varepsilon_s \right] L_S$. Nous en déduisons alors l'équation de la fonction linéaire donnant T^2 en fonction de L_S :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} k L_S \quad \text{avec} \quad k = 1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s) + \delta + \varepsilon_s$$

Nous avons : $k = 1 + 6,1 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-5} + 1,6 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} = 1,000\,78 \Rightarrow \underline{\underline{k = 1,000\,78}}$

A Lyon, $g = 9,806\,4 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow \underline{\underline{4\pi^2 k/g = 4,028\,92 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}}}$

VI - RÉSULTATS :

Nous avons utilisé le logiciel « Synchronie » pour le traitement des données et obtenir les résultats expérimentaux suivants :

$k = 1,000\,78$ (valeur calculée, fonction des caractéristiques du pendule - voir plus haut)

$$T^2 = a \cdot L_S \Rightarrow a = 4\pi^2 k/g_L = 4,029\,36 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{g_L = 4\pi^2 k/a = 9,805\,3 \text{ m.s}^{-2}}}$$

$$T = 2 \text{ s} \Rightarrow \underline{\underline{L_S = 992,7 \text{ mm}}}$$

=> **Nous constatons que les résultats obtenus sont excellents.**

Calcul d'erreur :

En reprenant l'équation de la droite, nous pouvons écrire :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} k L_S \Rightarrow \frac{dg}{g} = -2 \frac{dT}{T} + \frac{dL_S}{L_S} + \frac{dk}{k} \quad \text{avec} \quad \frac{dk}{k} \cong \frac{\theta_0}{4} d\theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta L_S}{L_S} + \frac{\theta_0}{4} \Delta \theta_0$$

Les mesures ont été faites, jeudi 15 février 2007, avec les incertitudes suivantes :

Pour 500 périodes, incertitude de 0,05 s $\Rightarrow \Delta T = 0,000\,1 \text{ s}$

Pour les mesures de L_S , incertitude de 0,1 mm $\Rightarrow \Delta L_S = 0,1 \text{ mm}$

Pour l'amplitude θ_0 , incertitude de $0,5^\circ$ $\Rightarrow \Delta \theta_0 = 0,009 \text{ rad}$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

$$\text{Alors : } \frac{\Delta g}{g} = \frac{2 \times 0,0001}{2} + \frac{0,1}{993} + \frac{0,0698}{4} \times 0,009 = 0,00036$$

$$\Rightarrow \Delta g_L = 9,805 \times 0,00036 = 0,0035 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow \underline{\underline{g_L = 9,805 \pm 0,004 \text{ m.s}^{-2}}}$$

Pour des mesures faites dans des conditions d'environnement et de moyens techniques moins favorables que celles dont j'ai pu bénéficier lors de mes mesures relatées plus haut, les incertitudes doivent être augmentées. Il sera plus réaliste de prendre (au mieux) :

$$\Delta L_S = 0,5 \text{ mm (mesures faite avec un mètre ruban)}$$

$$\text{Pour 250 périodes, incertitude de 0,1 s} \Rightarrow \Delta T = 0,0004 \text{ s}$$

$$\text{Pour l'amplitude } \theta_0, \text{ incertitude de } 1^\circ \Rightarrow \Delta \theta_0 = 0,02 \text{ rd}$$

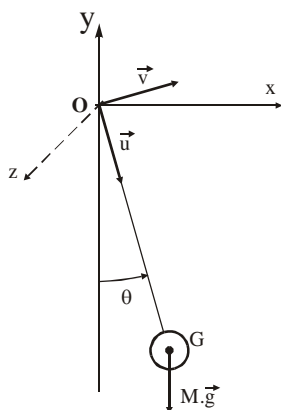
$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta g/g = 0,0012 \text{ m.s}^{-2}}} \text{ et } \underline{\underline{g_L = 9,81 \pm 0,01 \text{ m.s}^{-2}}}$$

Il est rappelé qu'à Cayenne (GUYANE) l'accélération de la pesanteur, au niveau de la mer, a pour valeur $g_C = 9,7807 \text{ m.s}^{-2}$. La différence de gravité entre Lyon et Cayenne est donc : $g_L - g_C = 0,0257 \text{ m.s}^{-2}$. Cet écart est presque 3 fois supérieur à l'incertitude absolue maximale.

VII – OSCILLATIONS RÉELLES AMORTIES :

1 - Introduction :

En pratique les oscillations mécaniques du pendule seront faiblement amorties, principalement par le frottement de l'air sur la sphère; nous supposons l'amortissement linéaire suite aux petites vitesses de la sphère dans son mouvement oscillatoire. Le couple de frottement visqueux \mathcal{M}_{air} sera défini alors par : $\mathcal{M}_{\text{air}} = C_{fv} \vec{z} = -\alpha \dot{\theta} \vec{z}$.



M : Masse du pendule
O : Centre de rotation
G : Centre d'inertie (OG = L)
J : Moment d'inertie / O
 C_{fv} : Couple de frottement visqueux (air)

Les lois de la dynamique : $J \cdot \ddot{\theta} \vec{z} = \sum \mathcal{M}_O \vec{F}_e$

Forces de pesanteur : $\mathcal{M}_g = \vec{OG} \wedge M \cdot \vec{g} = L \cdot \vec{u} \wedge M g (-\vec{y}) = -MgL (-\vec{y} \wedge \vec{u})$
 $\Rightarrow \mathcal{M}_g = -M \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta \cdot \vec{z}$

Forces de frottement visqueux : $\mathcal{M}_{\text{air}} = -\alpha \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}$; $[\alpha] = ML^2 T^{-1} = (MLT^{-2})LT$

Donc : $J \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta - \alpha \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL}{J} \sin \theta + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} = 0$

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

En posant : $\omega_0^2 = \text{Mg}L/J$, $\tau = 2J/\alpha \cong 2ML^2/\alpha$, et en supposant $\theta_0 \ll 1$, il vient :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec les conditions initiales suivantes : } \begin{cases} \theta(0) = -\theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

2 - Calcul précis de la période T :

Dans le cas d'un amortissement linéaire, les équations du mouvement pendulaire seront données par les expressions caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \theta(t) = -\theta_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_0 t \\ \dot{\theta}(t) = \theta_0 \omega_0 e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \theta(0) = -\theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

Les valeurs du temps t , notées t_k , pour lesquelles $\dot{\theta} = 0$ (maxima et minima successifs de θ) sont données par la suite d'égalités suivantes :

$$\sin \omega_0 t_k = 0 \Rightarrow \omega_0 t_k = k\pi = (2\pi/T_0) \cdot t_k \Rightarrow t_k = \frac{1}{2} k \cdot T_0 \quad (k \text{ entier}).$$

En reportant t_k dans l'expression de $\theta(t)$, nous obtenons : $\theta_k = (-1)^k \theta_0 e^{-kT_0/2\tau}$

Pour des oscillations non amorties d'amplitude angulaire θ_0 la période T sera donnée par la relation approchée : $T = T_0 (1 + \theta_0^2/16)$; $T_0 = (J/MgL)^{1/2}$.

Ainsi :

à la 1^{ère} demi-période : amplitude $\theta_0 \Rightarrow t_1 - t_0 = (T_0/2)(1 + \theta_0^2/16)$ avec $t_0 = 0$,

à la 2^{ème} demi-période : amplitude $\theta_1 \Rightarrow t_2 - t_1 = (T_0/2)(1 + \theta_1^2/16)$,

à la 3^{ème} demi-période : amplitude $\theta_2 \Rightarrow t_3 - t_2 = (T_0/2)(1 + \theta_2^2/16)$,

.....

à la $k^{\text{ème}}$ demi-période : amplitude $\theta_{k-1} \Rightarrow t_k - t_{k-1} = (T_0/2)(1 + \theta_{k-1}^2/16)$.

Alors pour n demi-périodes :

$$\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = t_n = \sum_{k=1}^n [(T_0/2)(1 + \theta_{k-1}^2/16)] = n(T_0/2) + (T_0/32) \sum_{k=1}^n \theta_{k-1}^2$$

Or : $\theta_{k-1}^2 = \theta_0^2 e^{-(k-1)T_0/\tau}$. Nous poserons $q = e^{-T_0/\tau}$; il vient :

$$\sum_{k=1}^n \theta_{k-1}^2 = \theta_0^2 \sum_{k=1}^n q_{k-1} = \theta_0^2 (1 + q + q^2 + \dots + q_{n-1}) = S_n$$

Cette suite géométrique de premier terme 1, de raison q aura pour somme : $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Ainsi nous pouvons écrire : $t_n = n(T_0/2) + (T_0/32) \theta_0^2 \frac{1 - e^{-nT_0/\tau}}{1 - e^{-T_0/\tau}}$

Pour un **nombre entier p de périodes**, c'est à dire pour $n = 2p$, la **période moyenne T_p** sera

telle que : $t_{2p} = pT_p = pT_0 + (T_0/32) \theta_0^2 \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{1 - e^{-T_0/\tau}}$

D'où la période d'oscillation moyenne T_p pour un chronométrage fait sur p périodes :

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

$$T_p = T_0 \left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{2p(1 - e^{-T_0/\tau})} \right] = \frac{t_{2p}}{p}$$

C'est cette dernière relation qu'il faudra utiliser dans nos calculs pour avoir la précision requise dans un chronométrage sur un grand nombre de périodes et non pas $T = T_0(1 + \theta_0^2/16)$ valable seulement pour un petit nombre d'oscillations.

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} \text{Si } p = 1/2 &\Rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ demi-période} \Rightarrow T_{1/2} = T_0(1 + \theta_0^2/16) = 2t_1 \\ \text{Si } p \rightarrow \infty &\Rightarrow \text{infinité de périodes} \Rightarrow T_\infty = T_0 \end{aligned}$$

3 - Cas de notre pendule simple :

Le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la sphère en mouvement dans l'air calme est donné par la relation $\mathcal{R} = Vd/v_{\text{air}}$ où V est la vitesse linéaire de la sphère, d son diamètre et v_{air} la viscosité cinématique de l'air définie par $v_{\text{air}} = \mu_{\text{air}}/\rho_{\text{air}}$ (μ_{air} : viscosité dynamique de l'air, ρ_{air} sa masse volumique).

Dans les conditions normales de pression et de température, nous avons pour l'air sec :

$$\mu_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad - \quad \rho_{\text{air}} = 1,21 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{air}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

Pour la vitesse linéaire maximale V_{max} de la sphère nous avons : $V_{\text{max}} = L\theta_0\omega_0 = 2\pi\theta_0/T_0$, avec : $L \cong 0,993 \text{ m}$; $\theta_0 = 4^\circ = 0,0698 \text{ rad}$ et $T_0 = 2 \text{ s}$ $\Rightarrow V_{\text{max}} = 0,218 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Comme $d = 0,03 \text{ m}$ $\Rightarrow \mathcal{R}_{\text{max}} = Vd/v_{\text{air}} \cong 440$

Dans ces conditions le coefficient de traînée C_x de la sphère sera tel que : $C_x \cong 0,42$. La force de frottement de l'air sur la sphère est définie par la relation suivante :

$$F_{\text{air}} = 1/2 C_x \rho_{\text{air}} S V = 1/2 C_x \rho_{\text{air}} S L (d\theta/dt) \quad \text{avec } S = \pi d^2/4 \cong 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \text{et } L \cong 0,993 \text{ m}.$$

Le couple de frottement sera donc : $C_{fv} = 1/2 C_x \rho_{\text{air}} S L^2 (d\theta/dt) = \alpha (d\theta/dt)$; d'où l'expression du coefficient de frottement visqueux α : $\alpha = 1/2 C_x \rho_{\text{air}} S L^2$.

$$\Rightarrow \alpha = 0,5 \times 0,42 \times 1,21 \times 0,0007 \times 0,993^2 \cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

$$J = ML^2 = 0,119 \times 0,993^2 = 0,117 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad \Rightarrow \quad J = 0,117 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Ainsi, la constante de temps $\tau = 2J/\alpha$ prend la valeur suivante : $\tau = 1\,337 \text{ s}$.

Des mesures expérimentales de durées et d'amplitudes (12/02/2007) ont donné les résultats qui suivent :

$$\begin{aligned} 4^\circ &\Rightarrow t = 0 \text{ mn } 0 \text{ s} \quad (\text{départ du chronométrage}) \\ 3^\circ &\Rightarrow t = 6 \text{ mn } 12,62 \text{ s} \\ 2,5^\circ &\Rightarrow t = 10 \text{ mn } 00,24 \text{ s} \\ 2^\circ &\Rightarrow t = 16 \text{ mn } 11,34 \text{ s} \quad (\text{fin du chronométrage}) \end{aligned}$$

Sachant que $\tau = (t_p - t_q)/\text{Ln}(\theta_q - \theta_p)$ $\Rightarrow \tau_{\text{moy}} = 1\,324 \text{ s}$

\Rightarrow La constante de temps calculée diffère très peu de celle issue de l'expérience.

Calculons les périodes moyennes T_{250} et T_{500} pour un chronométrage sur 250 et 500 périodes.

Pour $p = 250$ périodes (durée = 500 s) :

PENDULE MÉCANIQUE «SIMPLE»

$$1 - e^{-2pT_0/\tau} = 1 - e^{-\frac{1000}{1337}} = 0,527 \quad \text{et} \quad 1 - e^{-T_0/\tau} = 1 - e^{-\frac{2}{1337}} = 0,00149$$

$$\text{D'où : } \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{2p(1 - e^{-T_0/\tau})} = \frac{0,527}{500 \times 0,00149} = 0,707 \cong 0,71$$

Le coefficient correcteur dans l'expression donnant T_{250} sera donc égal à $\theta_0^2/22,5$.

Pour $p = 500$ périodes (durée = 1 000 s) :

$$1 - e^{-2pT_0/\tau} = 1 - e^{-\frac{2000}{1337}} = 0,776 \quad \text{et} \quad 1 - e^{-T_0/\tau} = 1 - e^{-\frac{2}{1337}} = 0,00149$$

$$\text{D'où : } \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{2p(1 - e^{-T_0/\tau})} = \frac{0,776}{1000 \times 0,00149} = 0,521 \cong 0,52$$

Le coefficient correcteur dans l'expression donnant T_{500} sera donc égal à $\theta_0^2/30,8$.

Nous aboutissons donc à la relation donnant L_S en fonction de $L_{\text{éq}}$ pour un chronométrage effectué sur p périodes :

$$L_S = L_{\text{éq}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8} \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{2p(1 - e^{-T_0/\tau})} - \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) - \delta - \varepsilon_s \right]$$

Nous avons également la relation suivante qui découle de la précédente :

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{g} k L_S \quad \text{avec} \quad k = 1 + \frac{\theta_0^2}{8} \frac{1 - e^{-2pT_0/\tau}}{2p(1 - e^{-T_0/\tau})} + \frac{m_s}{M} (\varepsilon_s' - 2\varepsilon_s) + \delta + \varepsilon_s$$

Pour $p = 500$ périodes : $k = 1 + 3,2 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-5} + 1,6 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} = 1,00049$
 $\Rightarrow \mathbf{k = 1,00049}$.

A Lyon, $g = 9,8064 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow \mathbf{4\pi^2 k/g = 4,02775 \text{ s}^2.\text{m}^{-1}}$.

VIII - RÉSULTATS :

Nous avons utilisé le logiciel « Synchronie » pour le traitement des données et obtenir les **résultats expérimentaux** suivants :

$k = 1,00049$ (valeur calculée, fonction des caractéristiques du pendule - voir plus haut)

$T^2 = a.L_S \Rightarrow a = 4\pi^2 k/g_L = 4,02936 \text{ s}^2.\text{m}^{-1} \Rightarrow \mathbf{g_L = 4\pi^2 k/a = 9,8025 \text{ m.s}^{-2}}$

En faisant intervenir les incertitudes, nous trouvons : $\mathbf{g_L = 9,803 \pm 0,004 \text{ m.s}^{-2}}$

$T = 2 \text{ s} \Rightarrow \mathbf{L_S = 992,7 \text{ mm}}$

\Rightarrow Nous constatons que les résultats obtenus sont très faibles.